

A FORGALMI ÁRAM FLUKTUÁCIÓJÁNAK HATÁSA AZ ÚT-TELJESÍTMÉNY GÖRBÉRE

Kovács Tamás ^{1*}, Alvarez Gil Rafael ¹

¹ Informatika Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:

forgalmi áram idősor
út-teljesítmény görbe

Keywords:

traffic flow time series
link performance function

Cikktörténet:

Beérkezett: 2017. szeptember 25
Átdolgozva: 2017. október 3.
Elfogadva: 2017. október 27.

Összefoglalás

Ez a munka azt vizsgálja, hogy a közlekedési forgalmi áram-eloszlások számításánál alapvető fontosságú út-teljesítmény függvény alakjára milyen hatással van az útra befolyó forgalmi áram időbeli fluktuációja. A szükséges matematikai összefüggések ismertetése után egy periodikus, fűrészfog alakú forgalmi áram-függvény segítségével demonstráljuk az amplitúdó és a periódushossz hatását az út-teljesítmény görbe alakjára. Azt az eredményt kaptuk, hogy az út-teljesítmény görbe monoton-emelkedő tartományának szélessége az áram-függvény amplitúdójával, míg a legmagasabb értéke az amplitúdó és a periódus-idő szorzatával arányos.

Abstract

This work investigates the effect of the traffic flow function's fluctuations on the link performance function. After deriving the employed mathematical relationships, the effect at hand is demonstrated with the help of a simple periodic saw-tooth shaped flow function. It is obtained that the width of the increasing domain in the link performance curve is determined by the amplitude of the saw-tooth flow, and the maximum value is determined by the product of the amplitude and the period length.

1. Bevezetés

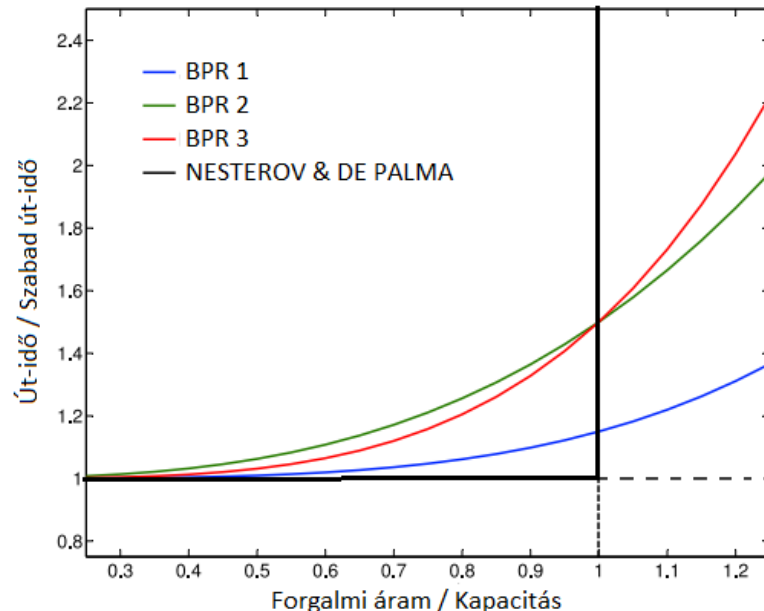
A közlekedési forgalom elemzésének a célja olyan modell létrehozása, amely lehetővé teszi a forgalomban résztvevő járművek számára, hogy a lehető legrövidebb időn belül elérjék a céljukat. A probléma megoldásának két megközelítése, a felhasználói egyensúly („User Equilibrium”) és a rendszer optimum („System Optimum”) meghatározása, a Wardrop első és második elvének [1] megfelelően. A felhasználói egyensúly az egyes közlekedő szereplők önálló döntései alapján alakul ki, amelynek célja, hogy minimalizálják a saját úton töltött idejüket. A rendszer optimum a közlekedési rendszernek az az állapota, amelyben az összes résztvevő jármű menetidejének az összege minimális.

A közlekedési hálózat modellezésének, valamint a rendszer optimum és a felhasználói egyensúly meghatározásának lényeges kiindulási pontja az út-teljesítmény függvény („link performance function”) [2], amely leírja az átlagos út-idő (az út megtételéhez szükséges idő) függését az úton folyó forgalmi áram mértékétől. Két modell emelhető ki: a Beckmann modell [3] és a Nesterov & de Palma modell [4]. A Beckmann modellben az út-teljesítmény görbét egy a forgalomtól függő, konvex, folytonos, nem csökkenő függvény írja le. A Nesterov & de Palma modellben az út-idő értéke az út kapacitása (maximális forgalmi áram) alatt állandó és megegyezik a szabad út-idővel, azaz azzal az idővel, amely az út megtételéhez szükséges, nulla forgalmi áram mellett.

* Kapcsolattartó szerző. Tel.: +36-76-516-412
E-mail cím: kovacs.tamas@gamf.uni-neumann.hu

Az 1. ábrán négy különböző matematikai modellnek megfelelő út-teljesítmény függvény látható. A BPR 1, BPR 2 és BPR 3 [5] függvények a Beckmann modellnek felelnek meg, amely megengedi az út kapacitásának a túllépését, ellentétben a Nesterov & de Palma modellel (vastag fekete vonal).

Ha az út végén forgalomirányító lámpa van, akkor feltételezhető, hogy az út kapacitása megegyezik a forgalmi lámpa áteresztő kapacitásával, ennél nagyobb átmenő forgalom nem lehetséges. Ebből a szempontból a Nesterov & de Palma modell látszik realisabbnak. Másrészt ennek a modellnek nem realiztikus eleme az, hogy konstansnak veszi a kapacitás érték alatti függvény-részt.



1. ábra. A gyakorlatban alkalmazott út-teljesítmény grafikonok

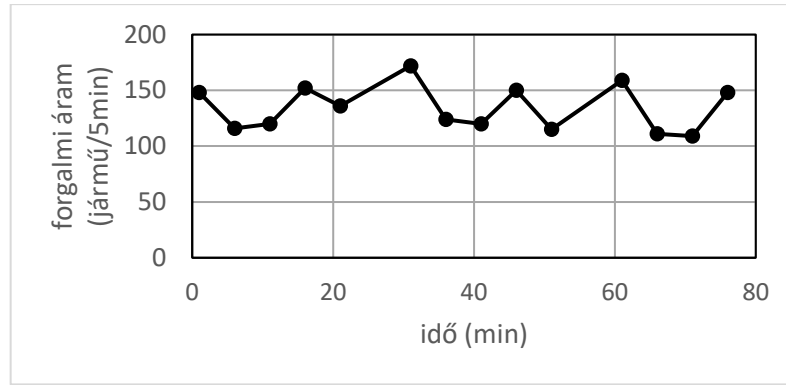
Az út-teljesítmény függvények tanulmányozása fontos feladat. Chudak, Dos Santos és Nesterov több különböző méretű közlekedési hálózatban megmutatták [6], hogy különböző út-teljesítmény függvények alkalmazása a felhasználói egyensúly vagy a rendszer optimum kiszámításához, különböző eredményekhez vezethet.

A szakirodalomban több különböző modellt alkalmaztak már a késleltetési idők meghatározására forgalomirányító lámpán végződő utakon. Ide vonatkozó példa Webster sztochasztikus modellje [7], és a mikroszimulációval történő számítás alkalmazásai [8,9,10].

A jelen munka célja, hogy a keresztmetszeti forgalmi áram fluktuációjának hatását az út-teljesítmény függvényre bemutassa, tisztán matematikai eszközökkel, egy viszonylag egyszerű és periodikus áram-idő függvényt használva kiindulásként.

2. A fluktuáció hatásának matematikai megfogalmazása

Egy adott t_i pillanatban mért keresztmetszeti forgalmi áram (amely definíció szerint $Q(t_i) = (t_i - t_{i-1})$ idő alatt áthaladt jármű-egység) / $(t_i - t_{i-1})$) sztochasztikus mennyiség, így kisebb nagyobb fluktuációval rendelkezik a használt idő-skálától függően. Példaként a 2. ábra bemutat egy ilyen mért idősort. Látható, hogy ennél a mérésnél (5 perces mérési intervallumokat használva) a fluktuáció amplitúdója körülbelül az átlagérték 15%-a. A relatív szórás ennél nyilván kisebb, de nagyságrendben hasonló. A bemutatott példa csupán illusztráció, a jelen munka nem tűzi ki célként a fluktuáció (vagy a relatív szórás) mértékének részletes elemzését.



2. ábra. Példa a keresztmetszeti forgalmi áram fluktuációjára. Budapest Üllői út – klinikák irányába, 2015.02.12 reggel 9 óra. (Forrás: saját mérés)

Mint láttuk, a közlekedési-lámpás kereszteződésben végződő út-teljesítmény görbét alapvetően a lámpa áteresztési kapacitása határozza meg (Q_l). Ez az a maximális Q keresztmetszeti forgalmi áram a lámpánál, amit a lámpa lehetővé tesz. Ha meg akarjuk határozni a teljesítmény-görbét, akkor a lámpánál való várakozási idő átlag-értékét kell kiszámítanunk különböző forgalmi áram terhelési értékek esetén.

Egy adott t pillanatban az úton felhalmozódott sor hosszát ($N(t)$) úgy definiáljuk, hogy az legyen azon autók száma, amelyek a nulla sebességgel várakoznak a lámpánál abban a pillanatban, amikor a lámpa zöldre vált. Ez a mennyiség tehát lámpa-ciklusonként csak egyszer mérhető, a többi időpillanatban a mért értékek interpolációját tekintjük $N(t)$ értékének.

Abban az esetben, amikor a $Q(t)$ forgalom értéke tartósan a Q_l lámpa-kapacitás alatt van, a lámpánál való átlagos várakozási idő a T_c lámpa-ciklusidő és a T_R piros-jelzés idő-függvénye, és a következőképpen számítható:

$$T_0 = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} W(t) dt = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_R} (T_R - t) dt = \frac{T_R^2}{2T_c} \quad (1)$$

ahol $W(t)$ a t időpontban a lámpához érkező jármű várakozási ideje (Ez a függvény lineárisan csökken a $[0, T_R]$ intervallumon és 0 a $[T_R, T_c]$ intervallumon).

Ilyenkor a zöld-idő alatt az összes felhalmozódott sor átjut a lámpán.

Abban az esetben viszont, amikor a forgalmi áram nagyobb a lámpa-kapacitásnál egy adott $[t_0, t_1]$ időintervallumban (melyre $t_1 - t_0 \gg T_c$), olyan sor alakul ki, amely nem képes egy zöld-idő alatt áthaladni. Ez a többlet-sor a következő integrállal számítható ki:

$$N = \int_{t_0}^{t_1} (Q(t) - Q_l) dt \quad (2)$$

Nézzük most azt az általánosabb esetet, amikor a $[0, t]$ időintervallumban a $Q(t)$ értéke kisebb is vagy nagyobb is lehet a kritikus Q_l értéknél. Ekkor a fenti (2) formula nem használható, mivel azokon az integrálási tartományokon, ahol $Q(t) - Q_l < 0$, a felhalmozódott többlet-sor elvileg csökken, de csak abban az esetben, ha volt felhalmozódott sor, azaz az eddigi integrál-érték pozitív volt. Amennyiben az integrál értéke nullára csökken, a $(Q(t) - Q_l)$ függvényt 0-val kell helyettesítenünk, mivel negatív sor értelmetlen. Mindezt figyelembe véve a t időpillanatig felhalmozódott többlet-sor:

$$N(t) = \int_0^t (Q(\tau) - Q_l) \cdot \theta(N(\tau)) d\tau \quad (3)$$

ahol a $\Theta(x)$ a lépcső-függvényt jelöli, azaz értéke negatív tartományon 0, egyébként 1.

Ha feltételezzük, hogy a $Q(t)$ függvény periodikus t_p periódus-idővel és van olyan $t_z < t_p$ időpont melyre

$$\begin{aligned} \int_0^{t_z} (Q(\tau) - Q_l) d\tau &= 0 \\ \int_0^t (Q(\tau) - Q_l) d\tau &\geq 0 \quad \forall t \in [0, t_z] \\ \int_0^t (Q(\tau) - Q_l) d\tau &\leq 0 \quad \forall t \in [t_z, t_p] \end{aligned} \quad (4)$$

akkor a (3) egyenlet a következőképpen egyszerűsödik:

$$N(t) = \begin{cases} \int_0^t (Q(\tau) - Q_l) d\tau, & \forall t \in [0, t_z] \\ 0, & \forall t \in [t_z, t_p] \end{cases} \quad (5)$$

Ha meghatároztuk az $N(t)$ függvényt, akkor ez alapján a teljes várakozási idő időátlaga:

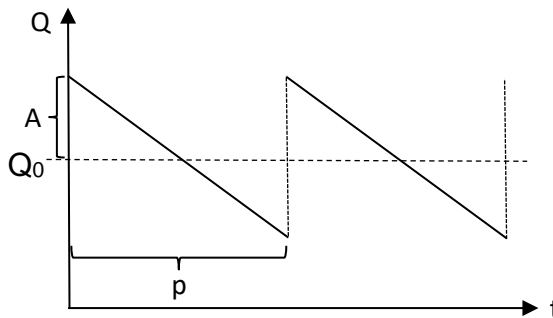
$$T = T_0 + \frac{1}{tQ_l} \int_0^t N(t) dt \quad (6)$$

3. Modellszámítás fűrészfog alakú áram-függvénnyel

Ahhoz, hogy képet alkothassunk a fluktuáció hatásáról, tételezzünk fel egyszerű, fűrészfog alakú $Q(t)$ függvényeket, amelyek segítségével meghatározhatjuk az út-teljesítmény görbét. Legyen tehát az áram-függvény a következő alakú:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 + A \left(1 - \frac{2t}{p}\right), \quad \forall t \in [0, p] \\ Q(t + p) &= Q(t) \end{aligned} \quad (7)$$

ahol a Q_0 , A és p paraméterek szabadon választhatóak a $Q(t) \geq 0$ feltétel mellett. A Q_0 paraméter adja meg a függvény átlag-értékét, az A paraméter a fűrészfog amplitúdója, a p paraméter a periódus (lásd a 3. ábrát).



3. ábra. A modell-számításhoz használt fűrészfog alakú $Q(t)$ függvény

A $Q_0 > Q_l$ esetben a kialakult sor idővel végtelenbe tart, a $Q_0 < Q_l - A$ esetben pedig a kialakult N többször 0. Tehát számunkra csak a $Q_l - A < Q_0 < Q_l$ eset az érdekes.

Ahhoz, hogy az (5) megoldást használhassuk, meg kell határoznunk a t_z értéket, ami itt nyilván létezik. Ehhez az

$$\int_0^{t_z} \left(Q_0 - Q_l + A \left(1 - \frac{2\tau}{p} \right) \right) d\tau = 0, \quad (8)$$

egyenletet kell megoldani, ami az integrálást elvégezve és a nem nulla t_z megoldást kifejezve:

$$(Q_0 - Q_l + A)t_z - \frac{A}{p}t_z^2 = 0 \Rightarrow t_z = \frac{(Q_0 - Q_l + A)p}{A} \quad (9)$$

Az (5) képletet felhasználva $N(t)$:

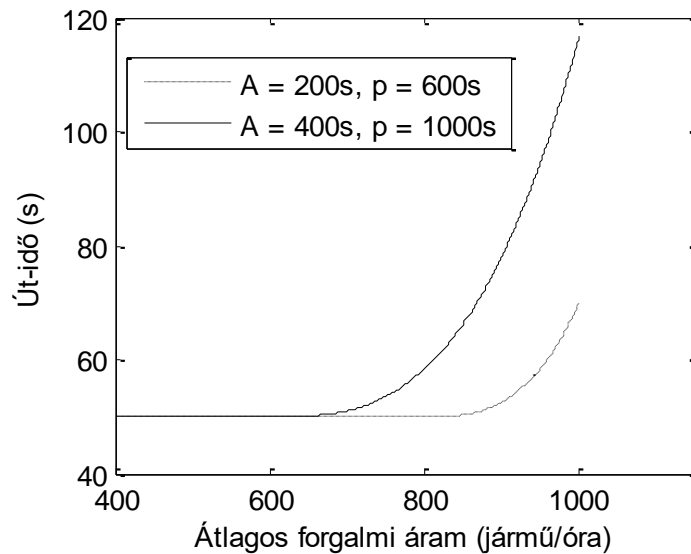
$$N(t) = \begin{cases} (Q_0 - Q_l + A)t - \frac{A}{p}t^2 & \forall t \in [0, t_z] \\ 0, & \forall t \in [t_z, t_p] \end{cases} \quad (10)$$

A (6) képlet alapján a várakozási idő pedig:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{1}{pQ_l} \int_0^{t_z} \left((Q_0 - Q_l + A)t - \frac{A}{p}t^2 \right) dt = T_0 + \frac{1}{pQ_l} \left(\frac{(Q_0 - Q_l + A)}{2}t_z^2 - \frac{A}{3p}t_z^3 \right) = \\ &= T_0 + \frac{1}{Q_l} \left(\frac{(Q_0 - Q_l + A)^3 p}{2A^2} - \frac{(Q_0 - Q_l + A)^3 p}{3A^2} \right) = T_0 + \frac{(Q_0 - Q_l + A)^3 p}{6Q_l A^2} \end{aligned} \quad (11)$$

4. Eredmények és konklúzió

A (11) kifejezés a legmagasabb fokszámot tekintve Ap -ben elsőfokú, tehát az amplitúdó és a periódus növekedésével legmagasabb fokban lineárisan nő a maximális várakozási idő. Emellett ne feledjük, hogy a többlet sor kialakulásának és egyben az út-teljesítmény görbe monoton növekedésének feltétele, hogy $Q_l - A < Q_0$. Azaz az út-teljesítmény görbe növekedő szakaszának szélessége az A amplitúdóval egyezik meg. (Ha más hatással nem számolunk.)



4. ábra. Az út-teljesítmény görbe a fűrészfog alakú áram függvény mellett. A paraméterek az ábrán láthatók.

Ha meg akarjuk kapni az út-teljesítmény görbét ennél a modellnél, akkor ábrázolnunk kell a T várakozási időt a Q_0 függvényeként, mivel ez az átlagos áram-terhelés. A 4. ábra mutatja a kapott eredményt ($A = 200s$, $p = 600s$) illetve ($A = 400s$, $p = 1000s$) paraméter párosításokkal.

Az előbbi paraméter-pár mellett a görbe csak kissé tér el a Nesterov & de Palma által javasolt modelltől, a második paraméterválasztás mellett azonban már inkább a Beckmann féle modell érvényes a görbére.

Feltételezhető, hogy sztochasztikus jellegű, azaz nem szabályos, nem periodikus áram-függvények esetén a fluktuáció átlagos amplitúdója és periódus-hossza hasonló hatással lesz az út-teljesítmény görbére. Tehát megállapítható, hogy a fluktuáció amplitúdójának (vagy más megközelítésben relatív szórásának) és a periódus hosszának mértéke alapvetően befolyásolhatja az út-ellenállás görbe jellegét.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

Irodalomjegyzék

- [1] J. G. Wardrop: Some theoretical aspects of road traffic research. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II, 1 (36):352–378, 1952.
- [2] Y. Sheffi: Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. PrenticeHall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [3] M. Beckmann, C.B. McGuire, and C. B. Winsten. Studies in the economics of transportation. CT: Yale University Press, 1956.
- [4] Y. Nesterov , A. de Palma: Optimization formulations and static equilibrium in congested transportation networks, Technical report, CORE, 1998.
- [5] Bureau of Public Road. Traffic assignment manual, U.S. Department of Commerce, Urban Planning Division, Washington, DC., 1964.
- [6] F. A. Chudak, V. Dos Santos Eleuterio, Y. Nesterov: Static Traffic Assignment Problem. A comparison between Beckmann (1956) and Nesterov & de Palma (1998) models, 7th Swiss Transport Research Conference, STRC, 2007.
- [7] F. V. Webster: Traffic signal settings. Road Research Technical Paper No. 39, Road Research Laboratory, Her Majesty Stationary Office, London, UK, 1958.
- [8] F. Dion, F., H. Rakha, Y. Kang: Comparison of delay estimates at under-saturated and oversaturated pre-timed signalized intersections. Elsevier, Transportation Research Part B 38, 99–122, 2004.
- [9] T. Kovács, K. Bolla, R. Alvarez Gil, R., E. Csizmás, Cs. Fábán, L. Kovács, K. Medgyes, J. Osztyényi, A. Végh: Parameters of the Intelligent Driver Model in signalized intersections. Technical Gazette Vol. 23, No. 5, 1469-1474, 2016.
- [10] R. P. Alvarez Gil., T. Kovács: Közlekedési lámpa optimalizálása IDM alapú szimulátorral. Innováció és fenntartható felszíni közlekedés IFFK 2016, pp. 92-96, 2016.